

Függvények határértéke, folytonossága

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKÉNEK ÉS FOLYTONOSSÁGÁNAK ÉRTELMEZÉSE

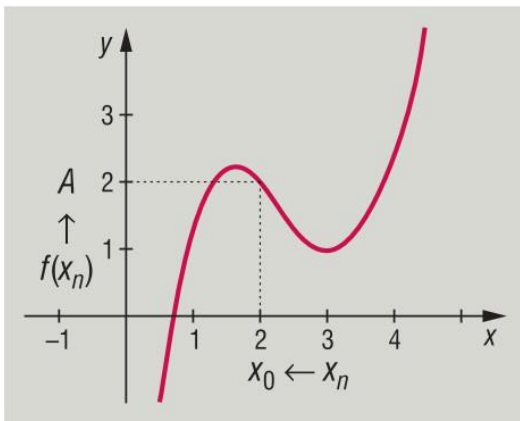
Függvények határértéke:

Bevezető példák:

1. Hogyan viselkedik az $f: \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ függvény az $x_0 = 5$ pont környezetében?
2. Hogyan viselkedik az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ 5, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$ függvény az $x_0 = 2$ pont környezetében?
3. Hogyan viselkedik az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x^2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$ függvény az $x_0 = 0$ pont környezetében?

Véges helyen vett határérték – Heine-féle definíció:

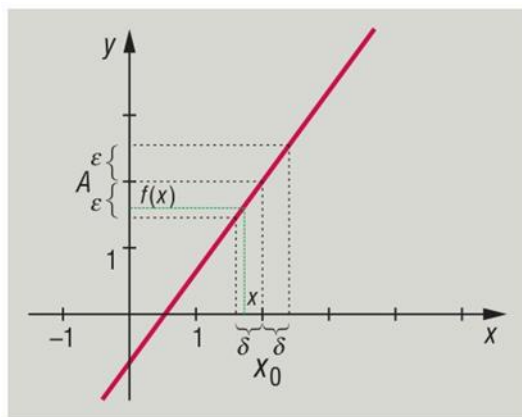
Definíció: Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 pont környezetében értelmezve, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban létezik a határértéke és ez a határérték A , ha minden az f függvény értelmezési tartományából vett $x_n \rightarrow x_0$ ($x_n \neq x_0$) sorozat esetén a függvényértékek $f(x_n)$ sorozata A -hoz tart.



9. ábra

Véges helyen vett határérték – Cauchy-féle definíció:

Definíció: Legyen az $f(x)$ függvény az x_0 pont környezetében értelmezve, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az $f(x)$ függvénynek az x_0 pontban létezik a határértéke és ez a határérték A , ha minden $\varepsilon(>0)$ -hoz létezik olyan $\delta(>0)$ hogy az f függvény értelmezési tartományának minden x elemére valahányszor $|x - x_0| < \delta$ teljesül, mindannyiszor $|f(x) - A| < \varepsilon$.



10. ábra

Annak jelölése, hogy A az $f(x)$ függvény határértéke az x_0 pontban:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Műveletek függvényhatárértékekkel:

Tétel: Ha az $f(x)$ és a $g(x)$ függvényeknek van határértéke az x_0 pontban, akkor a két függvény összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának is van határértéke ebben a pontban, és ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ ($x \neq x_0$), akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ahol } B \neq 0.$$

Végtelenben vett határérték:

A végtelenben vett függvényhatárérték fogalmát is kiterjeszthetjük tágabb értelemben vett konvergense.

Definíció: Legyen K olyan valós szám, amelyre minden $x > K$ esetén $f(x)$ értelmezve van. Az $f(x)$ függvénynek ∞ -ben vett határértéke A , ha valahányszor az értelmezési tartományból vett $x_n \rightarrow \infty$ sorozat esetén, mindannyiszor az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata A -hoz tart.

Jelölés: $\lim_{x_n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

Definíció: Legyen k olyan valós szám, amelyre minden $x < k$ esetén $f(x)$ értelmezve van. Az $f(x)$ függvénynek $-\infty$ -ben vett határértéke A , ha valahányszor az értelmezési tartományból vett $x_n \rightarrow -\infty$ sorozat esetén, mindannyiszor az $f(x_n)$ függvényértékek sorozata A -hoz tart.

Jelölés: $\lim_{x_n \rightarrow -\infty} f(x_n) = A$

Függvények folytonossága:

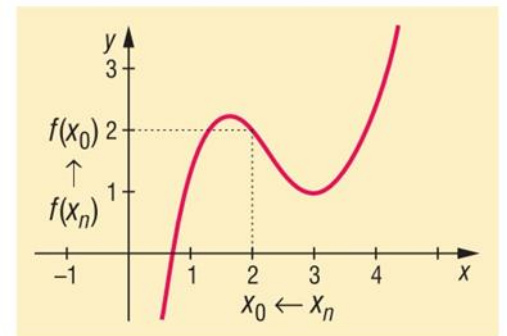
Pontbeli folytonosság létezéséhez három feltételnek kell teljesülni:

1. A függvény az x_0 -ban legyen értelmezve.
2. A függvénynek az x_0 -ban legyen határértéke.
3. Ez a határérték egyezzen meg az $f(x_0)$ függvényértékkel.

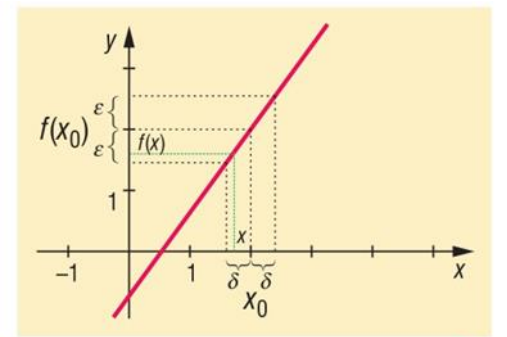
Pontban folytonos függvény:

Definíció: Legyen $f(x)$ értelmezve x_0 -ban és annak valamely környezetében. Az $f(x)$ függvény folytonos az értelmezési tartománya x_0 pontjában, ha x_0 -ban létezik és véges a határértéke, és ez a határérték egyenlő a függvény x_0 pontban felvett függvényértékével.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$



14. ábra



15. ábra



Tétel: Ha az $f(x)$ és $g(x)$ függvények az x_0 pontban folytonosak, akkor az x_0 pontban folytonos lesz az összegük, a különbségük, a szorzatuk és a hányadosuk is (amennyiben a nevező nem 0).

Nyílt intervallumon folytonos függvény:

Definíció: Az $f(x)$ függvény értelmezési tartományának nyílt $]a;b[$ intervallumán folytonos, ha az intervallum minden belső pontjában folytonos.

Mindenütt folytonos függvény:

Definíció: Azokat a függvényeket, amelyek az értelmezési tartományuk minden pontjában folytonosak, folytonos függvényeknek nevezzük.

Olvasmány:

Korábbi példáinkban mindig az $x_n^+ = x_0 + \frac{1}{n}$ és $x_n^- = x_0 - \frac{1}{n}$ sorozatokat vizsgáltuk. Rájuk mindig $x_n^+ > x_0$ és $x_n^- < x_0$ teljesül. Miért ne vizsgálhatnánk külön-külön is az x_n^+ és x_n^- sorozatokhoz tartozó függvényérték-sorozatokat?

3.5/A. DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvénynek valós x_0 pontban *jobb oldali határértéke* A , ha f értelmezve van x_0 valamely I jobb oldali környezetében, és bármely $x_n^+ \in I$, $x_n^+ \rightarrow x_0$ sorozat esetén $f(x_n^+) \rightarrow A$.

3.5/B. DEFINÍCIÓ: Az $f(x)$ függvénynek valós x_0 pontban *bal oldali határértéke* A , ha f értelmezve van x_0 valamely I bal oldali környezetében, és bármely $x_n^- \in I$, $x_n^- \rightarrow x_0$ sorozat esetén $f(x_n^-) \rightarrow A$.

Megjegyzés: Mindkét definíció biztosítja, hogy sem x_n^+ , sem x_n^- egyetlen eleme sem lehet x_0 . Az A határérték most is lehet $\pm\infty$.

Azért, hogy lássuk, nem öncélú fogalmakról van szó, tekintsük az alábbi két példát! Ezekben csupán féloldali határértéket vizsgálhatunk, ugyanis a függvény a kérdéses pontnak csak egyik oldalán létezik.

1. példa

Vizsgáljuk meg az $f(x) = \sqrt{x-2}$ függvény viselkedését az $x_0 = 2$ pont környezetében.

Megoldás

A függvény értelmezési tartománya $D_f = [2; \infty[$, tehát a kérdéses pontnak csak jobb oldali környezetében vizsgálható a függvény.

Ha $x_n^+ \rightarrow 2$, akkor $f(x_n^+) = \sqrt{x_n^+ - 2} \rightarrow 0$.

A jobb oldali határérték $A = 0$.

2. példa

Mit mondhatunk az $f(x) = \sqrt{3-x} + 1$ függvényről az $x_0 = 3$ pontban?

Megoldás

Mivel $D_g =]-\infty; 3]$, a kérdéses pontban csak bal oldali határérték van.

Ha pedig $x_n^- \rightarrow 3$, akkor $g(x_n^-) = \sqrt{3-x_n^-} + 1 \rightarrow 1$.

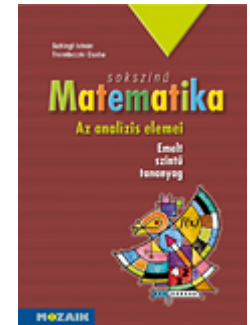
A függvény bal oldali határértéke $A = 1$.

A féloldali határértékek és a korábban megismert határérték kapcsolatát mutatja be a következő tétel.

3.2. TÉTEL: Egy $f(x)$ függvénynek akkor és csak akkor van egy adott helyen határértéke, ha ott a jobb és bal oldali határérték is létezik, és azok egyenlők.

Felhasznált irodalom:

- ▶ Mozaik Kiadó: Sokszínű matematika - Az analízis elemei tankönyv, 11-12. évfolyam emelt szint (73-79. oldal és 84-86. oldal)



Versenyfeladatok:

1. Egy adott földterület felásását három munkás végzi. Éppen elkészülnek a munkával, ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik. Akkor is éppen elkészülnének a munkával, ha az első munkás 7 napot, a második 9 napot és a harmadik 2 napot dolgozna. Hány napot kellene a munka elvégzéséhez a harmadik munkásnak dolgoznia, ha az első csak 2 napot, a második pedig csak 4 napot dolgozna?
2. Húzzon egy vízszintes egyenest, majd egy erre merőleges függőleges egyenest, ezután az utóbbira merőleges vízszintes egyenest, és így tovább. Minden újabb egyenes legyen merőleges a közvetlen előtte húzott egyenesre és különbözzön az összes előző egyenestől! Bizonyítsa be, hogy az eljárást bármikor abbahagyva a keletkező metszéspontok száma vagy két egymást követő természetes szám szorzatával vagy egy négyzetszámmal egyenlő!
3. Bizonyítsa be, hogy minden x valós szám esetén $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$! Mikor áll fenn egyenlőség?